当我们考虑连续介质（如流体或可变形的固体）移动时，有两种方法来追踪这种运动：拉格朗日观点和欧拉的观点。

以法国数学家拉格朗日（Lagrange）命名的拉格朗日方法可能是你最熟悉的方法。它对待连续介质就像粒子系统一样。流体或固体中的每个点都被标记为单独的粒子，位置设为，速度设为。你甚至可以把每个粒子想象成流体的一个分子。这里没什么特别的！固体几乎总是以拉格朗日的方式来模拟——一组粒子的离散集合连接在一起组成网格。

欧拉方法以瑞士数学家欧拉命名，采取另一种方式来追踪流体。流体流经的区域是一个向量场，我们赋予向量场中的固定点一些属性，如密度，速度，温度等，然后观察流体在流动的过程中是如何影响这些属性的。例如，较冷的流体流过温暖的区域时，固定点上的温度将会下降 。

在数值上，拉格朗日的观点对应于一个粒子系统，欧拉视点对应于空间上不会改变的固定网格。

常用的拉格朗日方法：涡旋方法(vortex methods), smoothed particle hydrodynamics(SPH)

在本书中，我们使用欧拉视角，原因有以下两点：

在欧拉视角中，很容易解析像压力梯度和粘性力的这样的空间导数。

在固定的欧拉曲面上用数值方法近似空间导数比在任意移动的粒子云上要容易的多。

连接这两种观点的关键是物质导数。我们先从拉格朗日开始：粒子的位置为，速度为。让我们来研究一个称为q的一般量：每个粒子都有一个q值。（q是粒子的一个属性，可能是密度，速度或温度等）。特别的，函数告诉我们粒子在时间t，位置上的q值。这是一个欧拉变量，因为它是一个关于空间的函数，而不是粒子的。那么对于某个粒子，当给定位置时，q的值是如何随时间变化的呢？只需要对整个函数取导即可（链式法则）：







这就是物质导数！

在学习物质导数之前我们先来回顾一下上述函数中两个项。第一项，表示在空间固定点上的变化有多块，这是一个欧拉测度。第二项，表示这个变化有多少是由于流经的流体的差异造成的（例如，温度变化是由于热空气被冷空气给替代了，不是因为空气分子发生了变化）。

物质导数的完整表达式：



显然在2D环境中，我们可以忽略和项。

我们继续讨论物理量、分子或粒子是如何在向量场中运动的。这被称为移流(advection)。移流等式就是物质导数等于0的情况：



也就是，

这表示物质在周围移动但所处的拉格朗日视角不变。

向量函数的物质导数：逐分量求导。例如一个颜色向量为，它的物质导数为：



如果对速度本身取物质导数，那该怎么做呢？速度在这里有两个意思：一个是流体流动的速度；另一个是流体属性移流。这两个意思是相同的，没有差别。一般把该物质导数称为自移流(self-advection)。求导过程与一般向量函数的求导过程没有任何差别，如下所示：

